集団遺伝学に現れる退化放物型偏微分方程式に対する数値 : 数式ハイブリッド法II(数式処理における理論とその応用の研究)

天野, 一男

数理解析研究所講究録
941巻 1996年 200-209

25.

集団遺伝学に現れる退化放物型偏微分方程式に対する数値一数式ハイブリッド法 II

天野一男 (城西大学理学部)

昨年の講演において著者は、1次元退化放物型偏微分方程式の近似一般解の構成法を紹介した ([1]). しかしながら、彼の手法は空間次元が1次元であることの特殊性に強く依存しており、多次元の問題には適用できなかった。本講演において著者は、先の自らの結果を拡張して、多次元退化放物型偏微分方程式の近似一般解の構成法を与える。根底にあるアイディアは、有限差分法のある種の再配列なので、彼の手法は有限差分法が適用可能なすべての偏微分方程式に適用可能である。

25.1 はじめに

われわれの目的は、集団遺伝学に現れる退化放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au \qquad (t>0,\ x_1>0,\ x_2>0,\ x_1+x_2<1) \tag{1}$$

に対する初期値問題の、近似一般解を構成することである。ただしここで、

$$\begin{aligned} Au &= \frac{1}{4N}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\{\,x_1(1-x_1)\,u\,\} - \frac{1}{2N}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\{\,x_1 x_2\,u\,\} + \frac{1}{4N}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\{\,x_2(1-x_2)\,u\,\} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_1}\{\,M^1(x_1,x_2)\,u\,\} - \frac{\partial}{\partial x_2}\{\,M^2(x_1,x_2)\,u\,\} \end{aligned}$$

また $N \in \{1,2,3,\cdots\}$ は effective population number を表し、$M^i(x_1,x_2)$ は x_1 と x_2 の実多項式とする。

このノートにおいては、簡単のために空間2次元の場合の近似一般解の構成法のみを論じるが、一般のn次元の場合への拡張は容易である。

25.2 準 備

この節の目的は、2つの基本的な補題1と補題2を示し、近似表現に関する補題3を証明することである。さらに、われわれは補題4において、偏微分作用素 A をより扱い易い形へと変形する。

補題 1. 零行列ではない非負行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \geq 0$ に対して、その平方行列は

$$\sqrt{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{ac-b^2}+a+c}} \begin{pmatrix} \sqrt{ac-b^2}+a & b \\ b & \sqrt{ac-b^2}+c \end{pmatrix}$$

で与えられる。

この補題の証明は容易なので省略する。

補題 2. 任意の自然数 n と任意の C^{n+1} 級の関数 $u(t,x_1,x_2)$ に対して、

$$\begin{aligned} & u(t+k, x_1+h_1, x_2+h_2) \\ = & \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}\left(k\frac{\partial}{\partial t} + h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\nu} u(t,x_1,x_2) \\ + & \int_0^1 \frac{(1-\theta)^n}{n!}\left(k\frac{\partial}{\partial t} + h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n+1} u(t+\theta k, x_1+\theta h_1, x_2+\theta h_2)\, d\theta \\ & \qquad (k, h_1, h_2 \in \mathbf{R}) . \end{aligned}$$

証明. 任意に1点 (t,x_1,x_2) を固定する。

$$F(\theta) = u(t+\theta k, x_1+\theta h_1, x_2+\theta h_2) \qquad (0 \leq \theta \leq 1) \tag{2}$$

とおく。このとき、明らかに

$$F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(\theta)\, d\theta . \tag{3}$$

部分積分を行うことにより

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(\theta)\, d\theta \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(0) + \left[-\frac{(1-\theta)^n}{n!} F^{(n)}(\theta)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^n}{n!} F^{(n+1)}(\theta)\, d\theta \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^n}{n!} F^{(n+1)}(\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

が従う。したがって、

$$F(1) \quad = \quad F(0) + \int_0^1 F'(\theta)\, d\theta$$

$$= \quad F(0)+F'(0)+\int_0^1 (1-\theta)F''(\theta)\,d\theta$$

$$\vdots$$

$$= \quad \sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}F^{(\nu)}(0)+\int_0^1 \frac{(1-\theta)^n}{n!}F^{(n+1)}(\theta)\,d\theta$$

これで証明が完了した。▮

補題 3. $u(t,x_1,x_2)$ は退化放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}a^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{2}b^i\frac{\partial u}{\partial x_i}+c\,u \tag{4}$$

の古典解とする。ただし、係数 $a^{ij}=a^{ij}(x_1,x_2)$, $b^i=b^i(x_1,x_2)$, $c=c(x_1,x_2)$ は、$\mathbf{R}^2_x$ で定義された、十分に滑らかな次のような実数値関数とする：

$$a^{12}(x_1,x_2)=a^{21}(x_1,x_2)\ , \tag{5}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2}a^{ij}(x_1,x_2)\,\xi_i\xi_j\geq 0 \qquad for\ all \quad (\xi_1,\xi_2)\in\mathbf{R}^2_\xi\ . \tag{6}$$

このとき、任意に１点 (t,x_1,x_2) を固定すれば、十分に小さなすべての $h>0$ に対して、

$$\begin{aligned}
& u(t,x_1,x_2)\\
= \ & \frac{1}{12}u(t,x_1+h\alpha^{11},x_2+h\alpha^{12})+\frac{1}{12}u(t,x_1-h\alpha^{11},x_2-h\alpha^{12})\\
+ \ & \frac{1}{12}u(t,x_1+h\alpha^{21},x_2+h\alpha^{22})+\frac{1}{12}u(t,x_1-h\alpha^{21},x_2-h\alpha^{22})\\
+ \ & \frac{1}{3}u(t,x_1+h^2b^1,x_2+h^2b^2)\\
+ \ & \frac{1}{3}u(t-h^2,x_1,x_2)\\
+ \ & \frac{h^2}{3}c\,u(t,x_1,x_2)+O(h^4)
\end{aligned}$$

がなりたつ。ただしここで、 α^{ij} は次のような実数とする：

$$\alpha^{12} \quad = \quad \alpha^{21} \qquad ,$$

$$\begin{pmatrix}\alpha^{11} & \alpha^{12}\\ \alpha^{21} & \alpha^{22}\end{pmatrix} \quad = \quad \sqrt{\begin{pmatrix}2a^{11} & 2a^{12}\\ 2a^{21} & 2a^{22}\end{pmatrix}} \qquad .$$

証明. 補題２によれば、

$$\begin{aligned}
& u(t,x_1\pm h\alpha^{i1},x_2\pm h\alpha^{i2})\\
= \ & u(t,x_1,x_2)\\
\pm \ & h\Big(\alpha^{i1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha^{i2}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)u(t,x_1,x_2)+\frac{h^2}{2}\Big(\alpha^{i1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha^{i2}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2u(t,x_1,x_2)\\
\pm \ & \frac{h^3}{6}\Big(\alpha^{i1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha^{i2}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^3u(t,x_1,x_2)+O(h^4)
\end{aligned}$$

なので

$$
\begin{aligned}
& u(t, x_1 + h\alpha^{11}, x_2 + \alpha^{12}) + u(t, x_1 - h\alpha^{11}, x_2 - \alpha^{12}) \\
+ \quad & u(t, x_1 + h\alpha^{21}, x_2 + \alpha^{22}) + u(t, x_1 - h\alpha^{21}, x_2 - \alpha^{22}) \\
= \quad & 4u(t, x_1, x_2) \\
+ \quad & h^2\Big(\alpha^{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha^{12}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2 u(t, x_1, x_2) + h^2\Big(\alpha^{21}\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha^{22}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2 u(t, x_1, x_2) \\
+ \quad & O(h^4)\ .
\end{aligned}
$$

仮定より α^{ij} は$\alpha^{12} = \alpha^{21}$ かつ$2a^{ij} = \alpha^{i1}\alpha^{1j} + \alpha^{i2}\alpha^{2j}$, なる実数なので、

$$
\begin{aligned}
& \Big(\alpha^{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha^{12}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2 + \Big(\alpha^{21}\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha^{22}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2 \\
= \quad & 2\Big(a^{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a^{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} + a^{21}\frac{\partial^2}{\partial x_2 x_1} + a^{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big)
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{4}\Big(u(t, x_1 + h\alpha^{11}, x_2 + h\alpha^{12}) + u(t, x_1 - h\alpha^{11}, x_2 - h\alpha^{12}) \\
& u(t, x_1 + h\alpha^{21}, x_2 + h\alpha^{22}) + u(t, x_1 - h\alpha^{21}, x_2 - h\alpha^{22})\Big) \\
= \quad & u(t, x_1, x_2) \\
+ \quad & \frac{h^2}{2}\sum_{i,j=1}^{2} a^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x_1, x_2) + O(h^4)\ .
\end{aligned}
$$

ふたたび、補題２より

$$
\begin{aligned}
& u(t, x_1 + h^2 b^1, x_2 + h^2 b^2) \\
= \quad & u(t, x_1, x_2) \\
+ \quad & h^2\sum_{i=1}^{2} b^i \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x_1, x_2) + O(h^4)\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& u(t - h^2, x_1, x_2) \\
= \quad & u(t, x_1, x_2) \\
- \quad & h^2\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_1, x_2) + O(h^4)\ .
\end{aligned}
$$

以上の結果を一つにまとめあげると、

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{12}\Big(u(t, x_1 + h\alpha^{11}, x_2 + h\alpha^{12}) + u(t, x_1 - h\alpha^{11}, x_2 - h\alpha^{12}) \\
& u(t, x_1 + h\alpha^{21}, x_2 + h\alpha^{22}) + u(t, x_1 - h\alpha^{21}, x_2 - h\alpha^{22})\Big) \\
+ \quad & \frac{1}{3}u(t, x_1 + h^2 b^1, x_2 + h^2 b^2) + \frac{1}{3}u(t - h^2, x_1, x_2) \\
= \quad & u(t, x_1, x_2) \\
+ \quad & \frac{h^2}{3}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} a^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x_1, x_2) + \sum_{i=1}^{2} b^i \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- &\quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_1, x_2)\Big) + O(h^4) \\
= &\quad u(t, x_1, x_2) \\
- &\quad \frac{h^2}{3} c\, u(t, x_1, x_2) + O(h^4)
\end{aligned}
$$

が従う。▮

$\mathbf{R}_x^2$ の領域

$$
D = \left\{ (x_1, x_2) \ : \ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_1 + x_2 < 1 \right\}
$$

を考える。偏微分方程式作用素 B を

$$
\begin{aligned}
Bv &= \frac{1}{2}\left\{ \frac{x_1(1-x_1)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - x_1 x_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{x_2(1-x_2)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right\} \\
&+ \left(\frac{1-3x_1}{2} - N\, M^1 \right) \frac{\partial v}{\partial x_1} + \left(\frac{1-3x_2}{2} - N\, M^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x_2} \\
&- \left(N \frac{\partial M^1}{\partial x_1} + N \frac{\partial M^2}{\partial x_2} \right) v
\end{aligned}
$$

で定義する。ここで $M^i = M^i(x_1, x_2)$ は先に定義された偏微分方程式作用素 A の係数である。

補題 4.

$$
\frac{\partial v}{\partial t} = Bv \qquad in \quad (0, T) \times D \tag{7}
$$

と仮定し、

$$
u(t, x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{3t}{2N} \right) v\left(\frac{t}{N}, x_1, x_2 \right) \tag{8}
$$

とおく。このとき、

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = Au \qquad in \quad (0, NT) \times D\ . \tag{9}
$$

がなりたつ。

証明. 直接計算により、

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \exp\left(-\frac{3t}{2N} \right) \left(\frac{1}{N}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{3}{2N} v \right) \tag{10}
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
Au &= \exp\left(-\frac{3t}{2N} \right) Av \\
&= \exp\left(-\frac{3t}{2N} \right) \Bigg[\frac{1}{2}\left\{ \frac{x_1(1-x_1)}{2N}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{x_1 x_2}{N}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{x_2(1-x_2)}{2N}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right\} \\
&+ \left(\frac{1-3x_1}{2N} - M^1 \right) \frac{\partial v}{\partial x_1} + \left(\frac{1-3x_2}{2N} - M^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x_2} \\
&- \left(\frac{3}{2N} + \frac{\partial M^1}{\partial x_1} + \frac{\partial M^2}{\partial x_2} \right) v \Bigg] \\
&= \exp\left(-\frac{3t}{2N} \right) \left(\frac{1}{N} Bv - \frac{3}{2N} v \right)
\end{aligned}
$$

が得られる。したがって、 $\dfrac{\partial v}{\partial t} = Bv$, より、 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = Av$ が従う。 ∎

25.3 数値－数式ハイブリッド法

この節においてわれわれは、目的の近似一般解を構成する（定理１、定理２）。

$$
\begin{aligned}
a^{11} &= \frac{x_1(1-x_1)}{2}\,,\ a^{12} = -\frac{x_1 x_2}{2}\,,\ a^{21} = -\frac{x_2 x_1}{2}\,,\ a^{22} = \frac{x_2(1-x_2)}{2}\,, && (11)\\
b^1 &= \frac{1-3x_1}{2} - N\,M^1\,,\ b^2 = \frac{1-3x_2}{2} - N\,M^2\,, && (12)\\
c &= -N\,\frac{\partial M^1}{\partial x_1} - N\,\frac{\partial M^2}{\partial x_2} && (13)
\end{aligned}
$$

とおく。これより

$$
Bu = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} a^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} b^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c\,u \tag{14}
$$

が従う。もともとの偏微分方程式の表現する集団遺伝学の現象によれば、一般性を失うことなく

$$
b\cdot n = b^1 n^1 + b^2 n^2 > 0 \qquad on\ \partial D \tag{15}
$$

と仮定してもよい。ただしここで、

$$
b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}\,,
$$

$$
n = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & on\quad \{(x_1,x_2)\in\partial D : x_1 = 0\} \\[2em] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & on\quad \{(x_1,x_2)\in\partial D : x_2 = 0\} \\[2em] \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} & on\quad \{(x_1,x_2)\in\partial D : x_1 + x_2 = 1\} \end{cases}\ .
$$

さらに、われわれは

$$
c(x_1,x_2) \le 0 \quad in\ D \tag{16}
$$

と仮定してもよい。というのは、もし

$$
w(t,x_1,x_2) = e^{-tc_0}u(t,x_1,x_2)\,,\quad c_0 = \sup_{(x_1,x_2)\in D} c(x_1,x_2)
$$

とおけば、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Bu \iff \frac{\partial w}{\partial t} = (B - c_0)w$$

が得られるからである。この節を通して、$u(t, x_1, x_2) \in C^{2,4}([0,\infty) \times D)$ は偏微分方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = Bu$ の古典解とし、かつ h は十分に小さな正の定数とする, *i.e.*, $0 < h \ll 1$.

補題3で得られた等式の右辺の $\dfrac{h^2}{3} c\, u(t, x_1, x_2)$ に対して、補題3を再帰的に適用すると、

$$\begin{aligned} u(t, x_1, x_2) &= \left(1 + \frac{h^2}{3} c(x_1, x_2)\right) \times \\ &\times \left(\frac{1}{12} u(t, x_1 + h\alpha^{11}, x_2 + h\alpha^{12}) + \frac{1}{12} u(t, x_1 - h\alpha^{11}, x_2 - h\alpha^{12})\right. \\ &+ \frac{1}{12} u(t, x_1 + h\alpha^{21}, x_2 + h\alpha^{22}) + \frac{1}{12} u(t, x_1 - h\alpha^{21}, x_2 - h\alpha^{22}) \\ &+ \left.\frac{1}{3} u(t, x_1 + h^2 b^1, x_2 + h^2 b^2) + \frac{1}{3} u(t - h^2, x_1, x_2)\right) + O(h^4) \end{aligned}$$

が得られる。この等式は、本節の key formula である。

関数 $d(x_1, x_2)$ を次の式で定義する：

$$d(x_1, x_2) = \begin{cases} \min(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2) & \text{if } (x_1, x_2) \in D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

補題 5. 任意の点 $(x_1, x_2) \in D$ と十分小さなすべての $h > 0$ に対して、

$$d(x_1, x_2) \geq 2h^2 \implies (x_1 \pm h\alpha^{11}, x_2 \pm h\alpha^{12}),\ (x_1 \pm h\alpha^{21}, x_2 \pm h\alpha^{22}) \in D .$$

証明. 補題1と直接計算により、$(x_1, x_2) \in D$ かつ $x_1 \geq 2h^2$ のとき、

$$\begin{aligned} & x_1 - h\alpha^{11} > 0 \\ \iff\ & x_1 - h \cdot \frac{\sqrt{x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2)} + x_1(1 - x_1)}{\sqrt{2\sqrt{x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2)} + x_1(1 - x_1) + x_2(1 - x_2)}} > 0 \\ \iff\ & x_1^2 \left(2\sqrt{x_1 x_2 \sqrt{1 - x_1 - x_2}} + x_1(1 - x_1) + x_2(1 - x_2)\right) \\ & > h^2 \left(x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2) + 2x_1(1 - x_1)\sqrt{x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2)} + x_1^2(1 - x_1^2)\right) \\ \Longleftarrow\ & x_1^2 \left(2\sqrt{x_1 x_2 \sqrt{1 - x_1 - x_2}} + x_1(1 - x_1) + x_2(1 - x_2)\right) \\ & > \frac{x_1}{2} \left(x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2) + 2x_1(1 - x_1)\sqrt{x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2)} + x_1^2(1 - x_1^2)\right) \\ \Longleftarrow\ & 2\sqrt{x_1 x_2 \sqrt{1 - x_1 - x_2}} + x_1(1 - x_1) + x_2(1 - x_2) \\ & > \frac{1}{2} \left(x_2 (1 - x_1 - x_2) + 2(1 - x_1)\sqrt{x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2)} + x_1(1 - x_1^2)\right) \\ \iff\ & (1 + x_1)\sqrt{x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2)} + \frac{x_1(1 - x_1)^2}{2} + \frac{x_2}{2}(1 + x_1 - x_2) > 0 . \end{aligned}$$

したがって、

$$x_1 \geq 2h^2 \implies x_1 - h\alpha^{11} > 0 .$$

同様の計算をすべての場合について行えば、補題5が証明される。∎

補題 6. 任意の点 $(x_1, x_2) \in D$ と十分小さなすべての $h > 0$ に対して、

$$(x_1 \pm h^2 b^1, x_2 \pm h^2 b^2) \in D \ .$$

証明. この補題は、$b \cdot n$ に関する仮定より、自明である。∎

点 $(x_1, x_2) \in D$ に対して、$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \partial D$ を次の式で定義する：

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \begin{cases} (0,0) & \text{if } x_1 < 2h^2,\ x_2 < 2h^2 \\ (1,0) & \text{if } x_2 < 2h^2,\ 1 - x_1 - x_2 < 2h^2 \\ (0,1) & \text{if } x_1 < 2h^2,\ 1 - x_1 - x_2 < 2h^2 \\ (x_1, 0) & \text{if } x_1 \geq 2h^2,\ x_2 < 2h^2,\ 1 - x_1 - x_2 \geq 2h^2 \\ (0, x_2) & \text{if } x_1 < 2h^2,\ x_2 \geq 2h^2,\ 1 - x_1 - x_2 \geq 2h^2 \\ \left(\frac{1+x_1-x_2}{2}, \frac{1-x_1+x_2}{2}\right) & \text{if } x_1 \geq 2h^2,\ x_2 \geq 2h^2,\ 1 - x_1 - x_2 < 2h^2 \\ (x_1, x_2) & \text{otherwise} \quad . \end{cases}$$

与えられた関数 $f(t, x_1, x_2)$ に対して、関数 $\tilde{f}(t, x_1, x_2)$ は

$$\tilde{f}(t, x_1, x_2) = f(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \qquad \Big((t, x_1, x_2) \in (0, \infty) \times D \Big)$$

で定義される。差分作用素 M_h を次の式で定義する：

$$M_h f(t, x_1, x_2) = \begin{cases} \left(1 + \frac{h^2}{3} c(x_1, x_2)\right) \times \\ \times \Bigg(\frac{1}{12} \tilde{f}(t, x_1 + h\alpha^{11}, x_2 + h\alpha^{12}) + \frac{1}{12} \tilde{f}(t, x_1 - h\alpha^{11}, x_2 - h\alpha^{12}) \\ + \frac{1}{12} \tilde{f}(t, x_1 + h\alpha^{21}, x_2 + h\alpha^{22}) + \frac{1}{12} \tilde{f}(t, x_1 - h\alpha^{21}, x_2 - h\alpha^{22}) \\ + \frac{1}{3} \tilde{f}(t, x_1 + h^2 b^1, x_2 + h^2 b^2) + \frac{1}{3} f(t - h^2, x_1, x_2) \Bigg) \\ \qquad \text{if } d(x_1, x_2) \geq 2h^2 \\ \\ f(t, x_1, x_2) \\ \qquad \text{if otherwise} \end{cases}$$

関数列 $p_k(t, x; s, y) = p_k(t, x_1, x_2; s, y_1, y_2),\ k = 0, 1, 2, \cdots$ を次のように帰納的に定義する：

$$p_0(t, x; s, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } (s, y) = (t, x) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

そして $(0, \infty) \times D$ 上で定義された任意の関数 $f(s, y)$ に対して、

$$\int_{(0,\infty)\times D} f(s, y)\, p_{k+1}(t, x; ds, dy) = \int_{(0,\infty)\times D} M_h f(s, y)\, p_k(t, x; ds, dy)$$

が成り立つように $p_{k+1}(t,x;s,y)$ を定義する ($k=0,1,2,\cdots$).

明らかに、

$$u(t,x)=\int_D p_0(t,x;ds,dy)\,u(s,y)\ .$$

また、補題3より

$$u(t,x)=\int_D p_1(t,x;ds,dy)\,u(s,y)+O(h^2)\ .$$

さらに、p_k の定義より、

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_D p_1(t,x;ds,dy)\,u(s,y)+O(h^2)\\
&= \int_D p_1(t,x;ds,dy)\big(M_h u(s,y)+O(h^2)\big)+O(h^2)\\
&= \int_D p_2(t,x;ds,dy)\,u(s,y)+O(h^2)r+O(h^2)\\
&= \int_D p_2(t,x;ds,dy)\big(M_h u(s,y)+O(h^2)\big)+O(h^2)r+O(h^2)\\
&= \int_D p_3(t,x;ds,dy)\,u(s,y)+O(h^2)r^2+O(h^2)r+O(h^2)\ .
\end{aligned}$$

ここで、

$$r=\sup_{0\le x\le 1}\Big(1+\frac{h^2}{3}c(x)\Big)<1\ .$$

よって、以下 天野 [1] と同様の議論を行えば、次の2つの定理を得る。

定理 1. $u(t,x)\in C^{2,4}([0,\infty)\times[0,1])$ は偏微分方程式 $\partial_t u=Bu$ の古典解とする。このとき、任意の $k=0,1,2,\cdots$ に対して、

$$u(t,x)=\int_{0\le s\le t,\ 0\le y\le 1} p_k(t,x;ds,dy)\,u(s,y)+O(h^2)\sum_{\nu=0}^{k-1}r^\nu \tag{17}$$

がなりたつ。ここで、$O(h^2)$ は k とは独立である。

定理 2. $u(t,x)\in C^{2,4}([0,\infty)\times[0,1])$ は偏微分方程式 $\partial_t u=Bu$ の古典解であって、初期条件

$$u(0,x)=\phi(x)\qquad (x\in D) \tag{18}$$

をまんぞくするものとする。このとき、任意の $k\gg 1$ に対して、

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_{0\le s<h^2,\ 0\le y\le 1} p_k(t,x;ds,dy)\,\phi(y)+O(h^2)\,r^k\\
&+ O(1)\,r^k\sum_{\ell=0}^{k_0}\binom{k}{\ell}\Big(\frac{1}{3}\Big)^\ell\Big(\frac{2}{3}\Big)^{k-\ell}+O(h^2)\sum_{\nu=0}^{k-1}r^\nu
\end{aligned}$$

がなりたつ。ただし、k_0 は $\ge t/h^2$ なる最小整数である。ここで、$O(1)$ と $O(h^2)$ は k とは独立である。

以上より、求める近似一般解

$$u(t,x) \sim \int_{0\le s<h^2,\ 0\le y\le 1} p_k(t,x;ds,dy)\,\phi(y) \tag{19}$$

が得られた。

参考文献

[1] K. Amano, Approximate general solution of degenerate parabolic equation related to population genetics, EJDE, Vol. 1995(1995) No. 15, pp 1-14 (http://ejde.math.swt.edu).

[2] J. F. Crow and M. Kimura, An Introduction to Population Genetics Theory, *Burgess Publishing Company*, 1970.

[3] W. J. Ewens, Mathematical Population Genetics, *Springer-Verlag*, 1989.

[4] A. C. Hearn, REDUCE User's Manual, version 3.5, *RAND Publication*, CP78(Rev. 7/94), 1994.

[5] O. A. Oleinik and E. V. Radkevich, Second Order Equations with Nonnegative Characteristic Form, *Amer. Math. Soc., Province, Rhode Island and Plenum Press, New York*, 1973.